3) On pose pour tout n ≥ 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\ln k}{k^2}$

a- Etudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

b- Montrer que pour tout k ≥ 2, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \le \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \le \frac{\ln k}{k^2}$

c- En déduire que pour tout n ≥ 2, on a : $U_n + \frac{\ln(n)}{n^2} \le S_n \le U_n + \frac{\ln 2}{2^2}$.

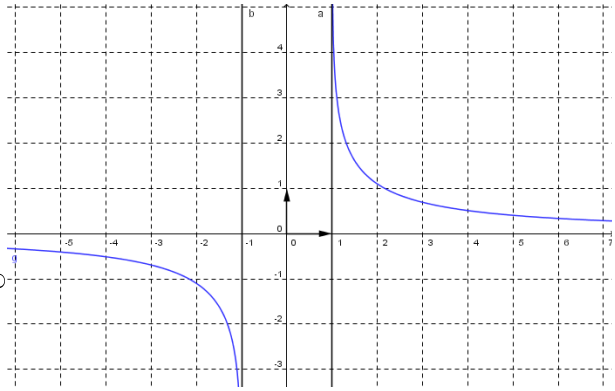
d- Montrer que (S_n est convergente et en déduire un encadrement de sa limite.

Les solutions

Exercice N°1 : 1.b 2.c 3. a 4.a 5.c 6.c 7.a 8.a 9.b 10.b

Exercice N°2 :

x	-∞		1		+∞
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	1	↗	+∞ ‖ -∞	↗	1



1.a) $D_g =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ / $\lim_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty$

c)

x	-∞		-1		1		+∞
g'(x)		+	‖	+	‖	+	
g(x)	0	↗	+∞ ‖ -∞	↗	+∞ ‖	↗	0

Exercice N°3 :

1. On a φ est dérivable sur son domaine de définition et $\varphi'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

x	-∞		-2		0		+∞
φ'(x)		+	‖	+	0	-	
φ(x)	0	↗	+∞ ‖ +∞	↗		↘	0

D'après le tableau de variation : φ(x) > 0 $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

1.**Continuité à droite en 0 :** $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln(x+2) - x\ln x$

$= 0\ln(2) - 0 = 0 = f(0)$ car $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ donc f est continue à droite en 0.

Dérivabilité à droite en 0 : $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

2.a) f'(x) = φ(x) > 0.

x	-∞		-2		0		+∞
f'(x)		+	‖	+	0	+	
f(x)	2	↗	+∞ ‖	↗		↗	2

$\lim_{+\infty} f = 2$ alors (ζ_f) admet Δ : y=2 comme asymptote horizontale au voisinage de +∞ et $\lim_{-\infty} f = 2$ alors (ζ_f) admet Δ : y=2 comme asymptote horizontale au

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...